带障碍的随机环境中的分枝随机游动的存活概率

报告人：吕铀

joint work with Wenming Hong

18th workshop on Markov Process and Related Topics

2023 年 7 月 30 日

目录

分枝随机游动

- 第0代：$Z_0 = 1, V(\emptyset) = 0$. 以点过程 $\mathfrak{L}$ 产生第一代.
- 第一代每个粒子**独立地**以 $\mathfrak{L}$ 产生下一代, 以此类推, 每代每个粒子都按照$\mathfrak{L}$产生下一代. 此即时齐的分支随机游动(BRW).
- 本次报告考虑当不同代的粒子繁衍后代的点过程随机时的情形.

时间随机环境分枝随机游动

- 可测空间 $(\Pi, \mathcal{F}_\Pi)$, 对$\forall \omega \in \Pi$, ω 都是(或都对应于)一个点过程。
- i.i.d. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n, \ldots$ 取值于 $(\Pi, \mathcal{F}_\Pi)$, $\mathcal{L}_1$ 的分布律记为 $\mathbf{P}_\Pi$.

将 $(\Pi, \mathcal{F}_\Pi, \mathbf{P}_\Pi)$ 的无穷维乘积概率空间记为 $(\Pi_\infty, \mathcal{F}_{\Pi_\infty}, \mathbf{P}_{\Pi_\infty})$.

此乘积空间称为**环境空间**.

$\mathcal{L} := (\mathcal{L}_n, n \in \mathbb{N}^+)$ 称为**环境序列**.

给定 $\mathcal{L}$ 的一个实现 $L := (L_n, n \in \mathbb{N}^+)$ 后，L 按如下方式驱动一列非时齐的分支随机游动.

- 0 时刻, 祖先 ϕ 位于实直线的原点.
- 1 时刻, 祖先 ϕ 死亡并同时依照点过程L_1产生 $N(\phi)$ 个孩子, 每个孩子相对于 ϕ 的位移为 $\zeta_i(\phi), 1 \le i \le N(\phi)$. 这些孩子构成了系统的第 1 代.
- 在 $n+1$ 时刻, 第 n 代的每个粒子 u 皆死亡并(相互独立地)依照点过程L_{n+1}产生 $N(u)$ 个孩子, 这些孩子们相对于其父亲 u 的位移为 $\zeta_i(u), i \le N(u)$. 此即第 $n+1$ 代.
- 对系统中任意地粒子u, $X(u) := (N(u), \zeta_1(u), \zeta_2(u), ...\zeta_N(u))$ 相互独立. 综上可知, $\mathrm{Law}(X(u)) = L_{n+1}, |u| = n$.

- 将上述非时齐分枝随机游动所在的概率空间记为 $(\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, \mathbf{P}_\mathcal{L})$.

  $\mathbf{P}_\mathcal{L}$: quenched law. 对应的期望记为 $\mathbf{E}_\mathcal{L}$.

- 在空间 $(\Pi_\infty \times \Gamma, \mathcal{F}_{\Pi_\infty} \bigotimes \mathcal{F}_\Gamma)$ 上定义概率 $\mathbf{P} := \mathbf{P}_{\Pi_\infty} \bigotimes \mathbf{P}_\mathcal{L}$, 即

$$\mathbf{P}(F \times G) = \int_{\mathcal{L} \in F} \mathbf{P}_\mathcal{L}(G)\, d\mathbf{P}_{\Pi_\infty}(\mathcal{L}), \ \forall F \in \mathcal{F}_{\Pi_\infty}, G \in \mathcal{F}_\Gamma.$$

  $\mathbf{P}(\Pi_\infty \times \cdot)$: annealed law (即$\mathbf{P}$在$\Gamma$上的边际分布, 记号仍记为$\mathbf{P}$). 对应的期望记为 $\mathbf{E}$. 我们将如上定义的

  随机环境分枝随机游动简写为 BRWre.

- **特别地**, 当 $\mathcal{L}_1$ 以概率 1 取 Π 中的某个样本点时, 这意味着系统中每个粒子 u 所对应的随机向量 $(N(u), \zeta_1(u), \zeta_2(u), ...\zeta_N(u))$ 都服从相同的分布, 则上述模型就**退化为 BRW.**

障碍问题

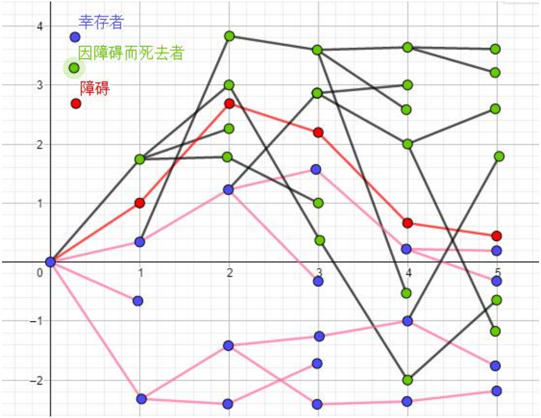
源于上世纪90年代Lubachevsky, B., Shwartz, A. and Weiss, A.对并行模拟 (parallel simulation)的研究.

所谓“障碍”, 实际是一个非负整数集(generation)上的函数 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

对于 (随机环境) 分枝随机游动的每一个具体的实现, **我们移除掉所有满足 $V(x) > \varphi(|x|)$ 的粒子 x, 并移除掉这些粒子的所有后代.**

经过这样的移除后得到的新系统就被称为带障碍 (φ) 的 (随机环境) 分枝随机游动.

图示 带障碍的 BRW



加入障碍后的永久存活概率

假定底分支过程上临界, 加入障碍后的考虑的问题:

- 问：是否存在一条无穷路径
  $x_0 = \emptyset < x_1 < x_2 < \cdots, \quad |x_i| = i, \quad i \geq 0$, (这里$x < x'$表示$x$是$x'$的父亲)
  使得对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有 $V(x_i) \leq \varphi(i)$.
  即加入障碍 φ 后系统存活概率
  $P_{surv}(\varphi) := \mathbb{P}\{$存在一条无穷路径, 使得 $V(x_i) \leq \varphi(i), \forall i \in \mathbb{N}\} = 0?, > 0?$
- $P_{surv}(\varphi)$ 与φ 的关系； $P_{surv}(\varphi) = 0$时, 灭绝速度?

研究背景 最左位置

障碍问题需要建立在对系统最左位置极限行为的研究上.

最左位置: $M_n = \min_{|x|=n} V(x)$.

- Hammersley (1974), Kingman (1975), Biggins (1976), 最左位置的第一阶极限行为$M_n = O(n)$.
- Hu, Shi (2009), Addario-Berry, Reed (2009), 最左位置的第二阶极限行为$M_n - \gamma n = O(\ln n)$.
- Aïdékon (2013), 最左位置的弱收敛行为 $\mathbb{P}(M_n - \gamma n - b\ln n > z) \to C(z)$.

在$\kappa(t)=\ln\mathbb{E}\left(\sum_{x:|x|=1}e^{-tV(x)}\right)$相对光滑的前提下

(Biggins et al[a](1991)) 当障碍函数 $\varphi(i)=\gamma i+ai$ 时:

(1)若$a>0$, 则 $P_{surv}(\varphi)>0$; (2)若$a\le 0$, 则 $P_{surv}(\varphi)=0$.

Gantert, et. al.[b](2009) $\exists c<0$, s.t. $a\downarrow 0$, $\sqrt{a}\ln P_{surv}(\varphi)\to c$.

(Jaffuel[c](2012)) 当障碍函数为 $\varphi(i)=\gamma i+ai^{1/3}$, 存在正数 a_c 使得:

(1)若 $a>a_c$, 则 $P_{surv}(\varphi)>0$; (2)若 $a<a_c$, 则 $P_{surv}(\varphi)=0$.

---

[a] A branching random walk with a barrier. *Ann. Appl. Probab.* **1**, 573-581.

[b] Asymptotics for the survival probability in a killed branching random walk. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47**(1), 111-129.

[c] The critical barrier for the survival of the branching random walk with absorption. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **48** (4), 989-1009.

*当$a=a_c$时, Shi(2015) 猜测在合适的可积性条件下,依然有$P_{surv}(\varphi)>0$.

Liu,Zhang(2019) α-stable BRW的障碍问题.

研究背景　灭绝速度

$P_{surv}(\varphi) := \mathbb{P}\{$存在一条无穷路径, 使得 $V(x_i) \le \varphi(i),\ \forall i \in \mathbb{N}\}$

定义第n代幸存人口数 $Y_n := \sharp\{|u| = n : \forall i \le n, V(u_i) \le \varphi(i)\}$,

设障碍函数为 $\varphi(i) = \gamma i + a i^{\alpha}$ (以下c_1, c_2, c_3皆负, c_1, c_3与a有关)

Jaffuel[a](2012) 若 $\alpha = \frac{1}{3}, 0 < a < a_c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Y_n > 0)}{\sqrt[3]{n}} = c_1$.

Aïdékon, Jaffuel[b](2011) 若分支机制为 $b-$叉树 $(b \ge 2)$,

(1) 当 $a = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Y_n > 0)}{\sqrt[3]{n}} = c_2$. (2) 当 $a < 0, \alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Y_n > 0)}{n} = c_3$.

---

[a] The critical barrier for the survival of the branching random walk with absorption. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat*. **48**(4), 989-1009.

[b] Survival of branching random walks with absorption. *Stochastic Process. Appl.* **121**, 1901-1937.

研究背景 BRWre 已有的研究

- Biggins, Kyprianou (2004) 引入了 BRWre 模型.
- Huang, Liu (2014) 研究了其最左 (右) 位置的第一阶极限行为以及大偏差问题.
- Gao, Liu (2014,2016) 对此模型的中心极限定理进行了细致而深入的研究.
- Wang, Huang (2017) 探讨了此模型的中偏差和鞅收敛问题.

而我们关注的是此模型的障碍问题.

下面的结论对我们如何设置障碍函数有着重要启示:

(Mallein, Milos[a](2019)) 第二阶最左位置极限的表达如下:

$$\frac{\inf_{|x|=n} V(x) - \Gamma_n}{\log n} \to C, \qquad \text{in Probability}.$$

其中$\Gamma_n = -\vartheta^{-1} K_n$, K_n 是一个与环境有关的随机游动, ϑ 是一个常数.

[a] Maximal displacement of a supercritical branching random walk in a time-inhomogeneous random environment. *Stochastic Process. Appl.* **129**(9), 3239-3260.

这个结论告诉我们, 虽然BRW: $M_n - \gamma n = O(\ln n)$,
但$M_n - n\mathbf{E}(\Gamma_1) \neq O(\ln n)$, 而是$M_n - \Gamma_n = O(\ln n)$.

定义

$$\kappa_n(\theta) := \ln \mathbf{E}_{\mathcal{L}} \left(\sum_{i=1}^{N(u)} e^{-\theta \zeta_i(u)} \right), \ \theta \geq 0, \ |u| = n-1.$$

假设 $\forall \theta \geq 0$, 都有 $\mathbf{E}(\kappa_1(\theta)^-) < +\infty$. 于是可以定义

$$\kappa(\theta) := \mathbf{E}(\kappa_1(\theta)) \in (-\infty, \ +\infty].$$

再假设$\exists \theta > \vartheta > 0, \ \kappa(\theta) < +\infty, \ \kappa(\vartheta) = \vartheta \kappa'(\vartheta)$, 定义

$$K_0 = 0, \quad K_n = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i(\vartheta).$$

障碍函数的确立

- 固定环境：$M_n - \gamma n = O(\ln n)$, 障碍函数设置为$\varphi(n) = \gamma n + an^{\alpha}$.
- 随机环境：$M_n - \Gamma_n = O(\ln n)$. 因此我们将
  障碍设置为$\varphi_{\mathcal{L}}(n) = \Gamma_n + an^{\alpha}$ (注意此时障碍也变为随机的).

针对随机环境, 我们想探索的障碍问题:

- 当环境由固定变为随机时(BRW变为BRWre时), 相应地上述结果在何时仍成立? 渐进行为有何不同? (随机环境带来的影响)
- 上述结果在何种收敛意义下成立? (随机环境研究的特色之一)

主要结果 带障碍的 BRWre 存活与灭绝的判定定理

$\mathcal{S} := \{\exists u_\infty \in \mathcal{T}_\infty,\ \forall i \in \mathbb{N},\ V(u_i) \le \varphi_{\mathcal{L}}(i)\},$
$Y_n := \sharp\{|u| = n : \forall i \le n, V(u_i) \le \varphi_{\mathcal{L}}(i)\}.$

定理 1 Lv&Hong (2023+)

设障碍函数为 $\varphi_{\mathcal{L}}(i) = -\vartheta^{-1}K_i + ai^\alpha$, 在一定假设下, $\mathbf{P}$ – a.s. 意义下有:

(1) 当 $\alpha > \frac{1}{3}, a > 0$ 时, 或 $\alpha = \frac{1}{3}, a > a_*$ 时, 有 $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) > 0$.

(2) 当 $\alpha = \frac{1}{3}, a < a_*$ 时, 或 $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ 时, 有 $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = 0$.

(3) 当 $\alpha = \frac{1}{3}, 0 < a < a_*$ 时, 有 $\frac{\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(Y_n>0)}{\sqrt[3]{n}} \to d_1$. ($d_1$与$a$有关).

(4) 当 $\alpha \in (0, \frac{1}{3}), a \ge 0$ 时, 有 $\frac{\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(Y_n>0)}{\sqrt[3]{n}} \to d_2$. ($d_2$与$a$无关).

$a_* > 0, d_1, d_2 < 0$, 三者皆与随机变量$\kappa_1(\vartheta), \kappa_1'(\vartheta), \kappa_1''(\vartheta)$有关.

定理 2 Lv (2023+)

在一定假设下, 上述(3),(4)在$L^p(p \ge 1)$意义下也成立.

主要结果　三种收敛的充分条件

记$M_1 := \mathbf{E}_{\mathcal{L}} T_1$, $U_1 := T_1 - M_1$. 这里(T_1, ξ_1) 满足

$$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}\left(T_1 \le x, \xi_1 \in [0, A]\right) = \mathbf{E}_{\mathcal{L}}\left(1_{\{N \le A\}} \sum_{i=1}^{N} 1_{\{\zeta_i \le x\}} e^{-\vartheta\zeta_i - \kappa_1(\vartheta)}\right).$$

Sufficient conditions for In Prob (黑色), $a.s.$ (黑+蓝), $L_p, p \ge 1$ (黑+红)

回忆 $\kappa(\theta) := \mathbf{E}(\kappa_1(\theta))$,

- $\kappa(0) > 0$, $\exists \theta > 0, \vartheta \in (0, \theta)$, 使得$\kappa(\theta) < +\infty, \kappa(\vartheta) = \vartheta\kappa'(\vartheta)$.
- $\exists \lambda_1 > 2$, $(\lambda_1 > 3)$ $\lambda_2 > 2$, $\mathbf{E}(|M_1|^{\lambda_1}) + \mathbf{E}\left(\left[\mathbf{E}_{\mathcal{L}}(|U_1|^{\lambda_2})\right]^{\lambda_1}\right) < +\infty$.
- $\exists \lambda_3 > 3$, $(\lambda_3 > 6)$ $\lambda_4 > 1$,

$$\mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta + \lambda_4)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}([\log^+ \mathbf{E}_{\mathcal{L}}(N^{\lambda_4})]^{\lambda_3}) < +\infty.$$

In Prob (黑色), $a.s.$ (黑+蓝), $L_p, p \geq 1$ (黑+红)

- $\exists \lambda_5 > 0, \lambda_6 \geq 1, (\lambda_6 > 2, \lambda_6 > p), \varepsilon > 0,$

$$\mathbf{E}\left(|\log \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(N \leq \lambda_5, T_1 \in [-\lambda_5, -\varepsilon])|^{\lambda_6}\right) < +\infty$$

$$\mathbf{E}\left(|\log \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(N \leq \lambda_5, T_1 \in [0, \lambda_5])|^{\lambda_6}\right) < +\infty.$$

- $\min(\lambda_1, \lambda_3/2) > \lambda_6/(\lambda_6 - p), \quad \mathbf{E}(M_1^2)/\mathbf{E}(U_1^2) < (\lambda_2 - 2)/(\lambda_1 - 2).$

以上诸条件可分为两类

- (R1). 对$|M_1|, |U_1|, N$的右尾的限制. (R2). 对$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \geq 0), \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \leq 0)$的左尾的限制.

  如何满足: (R1). $\kappa(\vartheta)$有一定的光滑性; (R2). T_1在±半轴都有分布.

  设置意义: (R1). 针对较长时间后的分枝/游动行为, 并保证BRWre关联的游动的quenched小偏差概率(形如)$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\max_{i \leq n} |T_i| \leq n^{1/3})$ 的$a.s.$ 收敛;

  (R2). 针对前几代的分枝/游动行为, 并保证BRWre关联的游动的quenched小偏差概率的L^p收敛;

- 回顾障碍为$\varphi_{\mathcal{L}}(i) = -\vartheta^{-1} K_i + a i^{\alpha}$, $V(\phi) = 0$. 回顾结论:

  (2) 当 $\alpha = \frac{1}{3}, a < a_*$ 时, 或 $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ 时, 有 $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = 0$.

  (3) 当 $\alpha = \frac{1}{3}, 0 < a < a_*$ 时, 有 $\frac{\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(Y_n > 0)}{\sqrt[3]{n}} \to d_1 \in (-\infty, 0)$.

  (R1)足以让(2)成立但不足以让(3)成立.

以上诸条件可分为两类

- (R1). 对$|M_1|, |U_1|, N$的右尾的限制. (R2). 对$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \geq 0), \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \leq 0)$的左尾的限制.
  如何满足: (R1). $\kappa(\vartheta)$有一定的光滑性; (R2). T_1在±半轴都有分布.
  设置意义: (R1). 针对较长时间后的分枝/游动行为, 并保证BRWre关联的游动的quenched小偏差概率(形如)$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\max_{i\leq n}|T_i| \leq n^{1/3})$ 的$a.s.$ 收敛;
  (R2). 针对前几代的分枝/游动行为, 并保证BRWre关联的游动的quenched小偏差概率的L^p收敛;
- 回顾障碍为$\varphi_{\mathcal{L}}(i) = -\vartheta^{-1}K_i + ai^{\alpha}$, $V(\phi) = 0$. 回顾结论:
  (2)　当 $\alpha = \frac{1}{3}, a < a_*$ 时, 或 $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ 时, 有 $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = 0$.
  (3)　当 $\alpha = \frac{1}{3}, 0 < a < a_*$ 时, 有 $\frac{\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(Y_n > 0)}{\sqrt[3]{n}} \to d_1 \in (-\infty, 0)$.
  (R1)足以让(2)成立但不足以让(3)成立.

- 笼统来说，$|M_1|, |U_1|, N$的右尾，$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \geq 0), \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \leq 0)$的左尾越薄，越容易拥有各种收敛性．甚至在$L^p$收敛的情形下，$|M_1|, |U_1|, N$的可积性和$|\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \geq 0)|, |\ln \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(T_1 \leq 0)|$的可积性可以互相补益，这一点体现于上述条件中的
$$\min(\lambda_1, \lambda_3/2) > \lambda_6/(\lambda_6 - p).$$
- 根据测度变换,$M_1 = \kappa_1(\vartheta) - \vartheta\kappa_1'(\vartheta)$. M_1的方差可以视做随机环境给结果带来影响．上面的所有结果都显示了当$\mathbf{E}(M_1^2)$越大时，$\{Y_n \geq 1\}$ 和$\mathcal{S}$ 发生的概率会越小．注意当随机环境退化时，$\mathbf{E}(M_1^2) = 0$.

以上诸条件还可分为两个维度

(1) 对环境空间的要求. (2). 对quenched实现的要求.

回顾上述依概率收敛的四个条件,其中黑色部分是时齐环境时也需要的,而棕色部分则是在时齐环境下天然成立的.

- $\kappa(0) > 0,\ \exists\theta > 0, \vartheta \in (0,\theta)$, 使得$\kappa(\theta) < +\infty, \kappa(\vartheta) = \vartheta\kappa'(\vartheta)$.
- $\exists\lambda_1 > 2, \lambda_2 > 2,\ \mathbf{E}(|M_1|^{\lambda_1}) + \mathbf{E}\Big(\ [\mathbf{E}_{\mathcal{L}}(|U_1|^{\lambda_2})]^{\ \lambda_1}\Big) < +\infty.$
- $\exists\lambda_3 > 3,\ \ \lambda_4 > 1,$

$$\mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta+\lambda_4)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}([\log^+ \mathbf{E}_{\mathcal{L}}(N^{\lambda_4})]^{\lambda_3}) < +\infty.$$

- 对比$\mathbf{E}([\log^+ \mathbf{E}_{\mathcal{L}}(N^{\lambda_4})]^{\lambda_3}) < +\infty$ 和$\mathbf{E}(N^{\lambda_4}) < +\infty$.
- $\exists\lambda_5, \varepsilon > 0, \lambda_6 \ge 1,\ \mathbf{E}\left(|\log \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(N \le \lambda, T_1 \in [-\lambda_5, -\varepsilon])|^{\lambda_6}\right) < +\infty.$

以上诸条件还可分为两个维度

(1) 对环境空间的要求. (2). 对quenched实现的要求.

回顾上述依概率收敛的四个条件,其中黑色部分是时齐环境时也需要的,而棕色部分则是在时齐环境下天然成立的.

- $\kappa(0) > 0$, $\exists\theta > 0, \vartheta \in (0,\theta)$, 使得$\kappa(\theta) < +\infty, \kappa(\vartheta) = \vartheta\kappa'(\vartheta)$.
- $\exists\lambda_1 > 2, \lambda_2 > 2,\ \mathbf{E}(|M_1|^{\lambda_1}) + \mathbf{E}\Big(\big[\mathbf{E}_{\mathcal{L}}(|U_1|^{\lambda_2})\big]^{\lambda_1}\Big) < +\infty.$
- $\exists\lambda_3 > 3,\ \lambda_4 > 1,$

$$\mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta+\lambda_4)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}(|\kappa_1(\vartheta)|^{\lambda_3}) + \mathbf{E}([\log^+ \mathbf{E}_{\mathcal{L}}(N^{\lambda_4})]^{\lambda_3}) < +\infty.$$

- 对比$\mathbf{E}([\log^+ \mathbf{E}_{\mathcal{L}}(N^{\lambda_4})]^{\lambda_3}) < +\infty$ 和$\mathbf{E}(N^{\lambda_4}) < +\infty$.
- $\exists\lambda_5, \varepsilon > 0, \lambda_6 \geq 1,\ \mathbf{E}\left(|\log \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(N \leq \lambda, T_1 \in [-\lambda_5, -\varepsilon])|^{\lambda_6}\right) < +\infty.$

满足以上假设的例子

例1：对于$\mathcal{L}_1$的任何一个实现(即一个点过程)$\mathfrak{m}$皆满足：分支机制N 与游动机制$(\zeta_i, i \le N)$ 相独立，$\{\zeta_i, i \le N\}$ 独立同分布，其共同分布为$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，$\mathcal{N}$代表正态分布(以上$N, \zeta, \mu, \sigma$皆可随$\mathfrak{m}$的不同而不同)．如果存在正常数$\tau_1 > 6, \tau_2 > 4$使得

$$\mathbf{E}(\log \mathbf{E}_{\mathcal{L}} N(\mathfrak{m})) > 0, \quad \mathbf{E}[(\log^+ N(\mathfrak{m}))^{\tau_1}] < +\infty,$$

$$\mathbf{E}(\sigma(\mathfrak{m})^{2\tau_1}) < +\infty, \quad \mathbf{E}(\sigma(\mathfrak{m})^{-\tau_2}) < +\infty.$$

那么由这样的$\mathcal{L}_1$驱动的BRWre满足上面的全部条件．

证明概述

证明依据Vitali收敛定理, 并结合测度变换(many-to-one引理), 强逼近原理和二阶矩方法, 最关键的一步在于证明$\forall 0 \le b \le a \le 1, \exists r > 0$,

$$\sup_n \mathbf{E}\left(\left|\ln \inf_{|x|\le a\sqrt{n}} \mathbf{P}_{\mathcal{L}}\left(\forall_{i\le n} \quad \left|\frac{T_i}{\sqrt{n}}\right| \le 1, \left|\frac{T_n}{\sqrt{n}}\right| \le b, \xi_i \le e^{r\sqrt{n}} \middle| T_0 = x\right)\right|^p\right) < +\infty.$$

经过一系列估计, 上面的quenched概率 在$\mathbf{P}$-极大概率下 与一列随机泛函

$$g_n(M_i, i \le n)$$

同阶, $\{M_n\}$ 是$\{T_n\}$的quenched mean 序列, 且在$\mathbf{P}$-极大概率下$g_n(M_i, i \le n)$不会随$n \to +\infty$趋于无穷小.

对于i.i.d. 序列部分和S_n, 有如下结果.

(Mogul'skiĭ[a],1974) 设 $g(s)$ 与 $h(s)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的两个连续函数且满足 $g(s) < h(s)$, $\forall s \in [0,1]$. 令 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $x \in (g(0), h(0))$, 对于期望为 0 方差 σ^2 有限的随机游动 S 就有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \mathbb{P}\left(\forall_{i\le n} S_i \in [g(\frac{i}{n})n^\alpha, h(\frac{i}{n})n^\alpha] | S_0 = x\right)}{n^{1-2\alpha}} = -\int_0^1 \frac{\pi^2\sigma^2}{2(h(s)-g(s))^2} ds.$$

[a]Small deviations in the space of trajectories. *Theory Probab. Appl.* **19**, 726-736.

解决BRWre障碍问题的重要工具之一是RWre的小偏差原理.

$\mu := \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, i.i.d. 取值于$\{\mathbb{R}$ 上全体概率测度$\}$.

给定μ的某一个实现后，引入一列相互独立的随机变量 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, X_n 的分布为 μ_n, 记$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, 那么就称 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列
时间随机环境下的随机游动(RWre).

$\mathbf{P}_\mu$: quenched law;

$\mathbf{P}$: annealed law.

随机环境版本的小偏差估计

定理 3 Lv, Hong (2023)

$\forall \alpha \in (0, \frac{1}{2}), a \in [0,1), b \in (0,1]$. 自然数列$\{t_n\}$, 则在一定条件下(中心的,可积性)会有

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} \ln \mathbf{P}_\mu\left(\forall_{0\le i\le n}\ |S_{t_n+i}| \le n^\alpha \middle| S_{t_n} = x\right)}{n^{1-2\alpha}} \to C < 0.$$

$$\frac{\inf_{|x|\le an^\alpha} \ln \mathbf{P}_\mu\left(\forall_{0\le i\le n}\ |S_{t_n+i}| \le n^\alpha, |S_{t_n+n}| \le bn^\alpha \middle| S_{t_n} = x\right)}{n^{1-2\alpha}} \to C.$$

随机环境的影响

1. Lv, Hong (2023)给出了上述两个收敛在$\mathbf{P}-a.s.$意义下成立的一组充分条件，其中并不需要对$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(S_1\le 0),\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(S_1\ge 0)$的尾概率进行限制.

2. Lv (2023+)给出了上述两个收敛在L_p意义下成立的一组充分条件，下面的情形说明要保证$L_p(p\ge 1)$收敛则务必对$\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(S_1\le 0),\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(S_1\ge 0)$ 的左尾概率进行必要的限制.

3. 举个极端情形. 设$\mathbf{P}(\mathbf{P}_{\mathcal{L}}(S_1\ge\epsilon)=1):=p>0$, 那么$\mathbf{P}(\mathbf{P}_{\mu}\left(\forall_{0\le i\le n}\ |S_n|\le n^{\alpha}\right)=0)\ge p^n$. 这意味着上述两个随机序列中每一项都会以正的概率取值$+\infty$, 这显然不可能会L^p 收敛到某个常数.

参考文献

- Hu, Y. and Shi, Z. (2009) Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees. *Ann. Probab.* **37**(2), 742-789.
- Addario-Berry, L. and Reed, B. (2009). Minima in branching random walks. *Ann. Probab.* **37** 1044 – 1079.
- Aïdékon, E. (2013) Convergence in law of the minimum of a branching random walk. *Ann. Probab.* **41(3A)**, 1362-1426.
- Shi, Z. (2015) *Branching random walks.* École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII-2012. Lecture Notes in Mathematics 2151, Springer, Berlin.
- Biggins, J.D. and Kyprianou, A.E. (2004) Measure change in multitype branching. *Adv. Appl. Probab.* **36**(2), 544-581.

参考文献

Huang, C. and Liu, Q. (2014) Branching random walk with a random environment in time. ArXiv:1407.7623.

Gao, Z. Liu, Q. and Wang, H. (2014) Central limit theorems for a branching random walk with a random environment in time. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* **34**(2), 501-512.

Wang, X. and Huang, C. (2017) Convergence of Martingale and Moderate Deviations for a Branching Random Walk with a Random Environment in Time. *J. Theoretical Probab.* **30**, 961-995.

Liu, J. and Zhang, M. (2019) Critical survival barrier for branching random walk. *Front. Math. China* **14**(6), 1259-1280.

Lv, Y. and Hong, W. (2023) Quenched small deviation for the trajectory of a random walk with random environment in time. *Theory Probab. Appl.* **68**(2), 323-342.

非 常 感 谢！